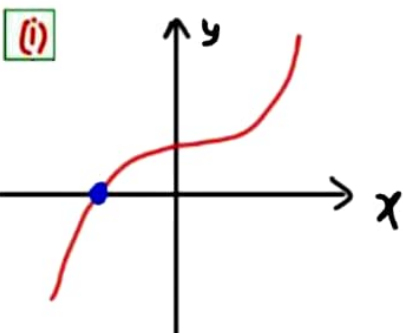
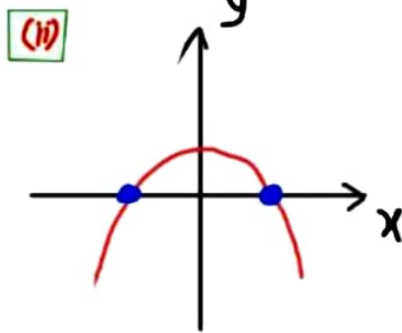


## बहुपद (Polynomials)

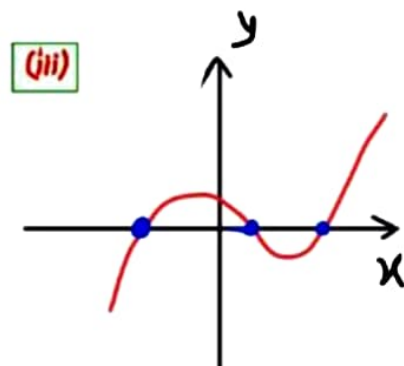
**उदाहरण-1** नीचे दी गई आकृति में ग्राफों को देखिए उल्लेख आकृति  $y = p(x)$  जहाँ  $p(x)$  एक बहुपद है, का ग्राफ है, ग्राफों से उल्लेख के लिए,  $p(x)$  के शून्यों की संख्या ज्ञात कीजिए।



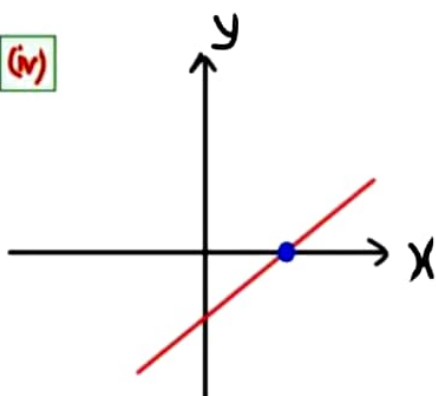
शून्यों की संख्या = 1



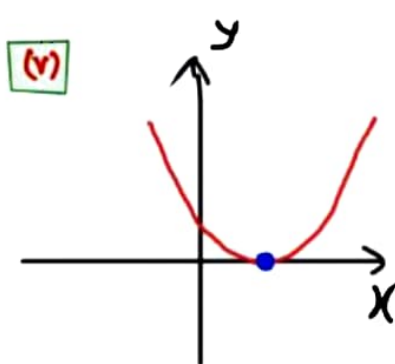
शून्यों की संख्या = 2



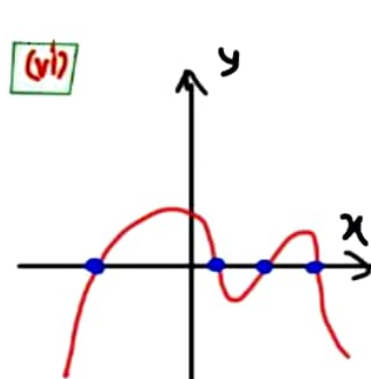
शून्यों की संख्या = 3



शून्यों की संख्या = 1



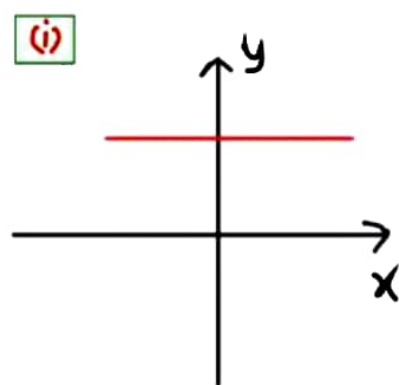
शून्यों की संख्या = 1



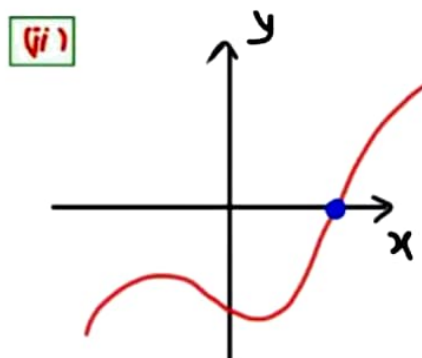
शून्यों की संख्या = 4

## प्रश्नावली 2.1

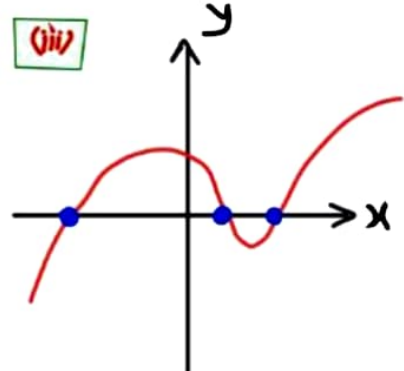
**प्रश्न-1** किसी बहुपद  $p(x)$  के लिए  $y = p(x)$  का ग्राफ नीचे दिया गया है। उल्लेख स्थिति में  $p(x)$  के शून्यों की संख्या ज्ञात कीजिए।



शून्यों की संख्या = 0  
(कोई शून्य नहीं)

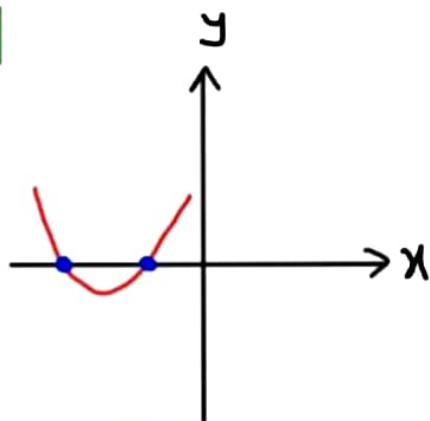


शून्यों की संख्या = 1

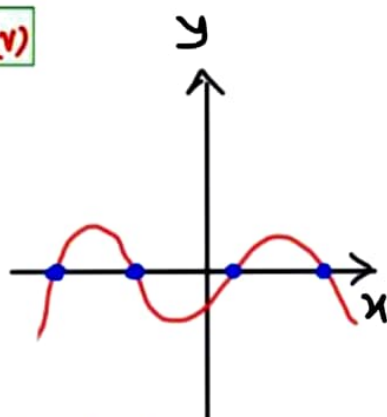


शून्यों की संख्या = 3

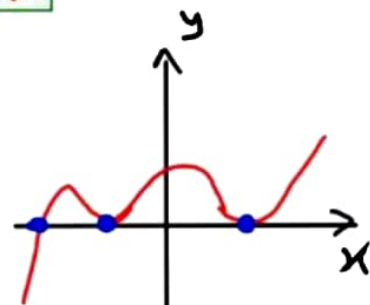
(iv)



(v)



(vi)



शून्यांको की संख्या = 2

शून्यांको की संख्या = 4

शून्यांको की संख्या = 3

★ किसी बहुपद के शून्यांको और गुणांको में सम्बन्ध :-

द्विघात बहुपद  $\Rightarrow ax^2 + bx + c$

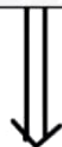
$$\left[ \begin{array}{lcl} x^2 \text{ का गुणांक} & = & a \\ x \text{ का गुणांक} & = & b \\ \text{अचर पद} & = & c \end{array} \right]$$

शून्यांको का योग =  $-\frac{b}{a}$

शून्यांको का गुणनफल =  $\frac{c}{a}$

★ बहुपद के शून्यांको का योग एवं गुणनफल दिए होने पर बहुपद ज्ञात करना :-

$$x^2 - \left( \begin{array}{l} \text{शून्यांको} \\ \text{का योग} \end{array} \right) x + \left( \begin{array}{l} \text{शून्यांको का} \\ \text{गुणनफल} \end{array} \right) = 0$$



शून्यांक =  $\alpha, \beta$

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

**उदाहरण -2** द्विघात बहुपद  $x^2 + 7x + 10$  के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।

किसी बहुपद के शून्यों और गुणकों में सम्बन्ध  $\rightarrow$

$$x^2 + 7x + 10$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x + 2x + 10$$

$$\Rightarrow x(x+5) + 2(x+5)$$

$$\Rightarrow (x+5)(x+2)$$

$$x+5=0$$

$$x = -5$$

$$x+2=0$$

$$x = -2$$

$$\text{शून्यांक} = -5, -2$$

$$x^2 \text{ का गुणांक} = 1 = a$$

$$x \text{ का गुणांक} = 7 = b$$

$$\text{अन्य पद} = 10 = c$$

$$\text{शून्यांकों का योग} = -\frac{b}{a}$$

$$\text{शून्यांकों का योग} = (-5) + (-2) = -7$$

$$-\frac{b}{a} = -\frac{7}{1} = -7$$

$$\text{शून्यांकों का गुणनफल} = \frac{c}{a}$$

$$\text{शून्यांकों का गुणनफल} = (-5)(-2) = 10$$

$$\frac{c}{a} = \frac{10}{1} = 10$$

**उदाहरण -3** बहुपद  $x^2 - 3$  के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।

$$\text{हल- } x^2 - 3 \Rightarrow x^2 - (\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) \quad [x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)]$$

$$\Rightarrow x+\sqrt{3}=0, \quad x-\sqrt{3}=0$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{शून्यांक} = -\sqrt{3}, \sqrt{3}$$

$$\text{शून्यांकों का योग} = -\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$$

$$\text{शून्यांकों का गुणनफल} = (-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3}) = -3$$

**सत्यता की जाँच :-**

$$\Rightarrow x^2 - 3$$

$$\Rightarrow x^2 + 0x - 3$$

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -3$$

$$\text{शून्यांकों का योग} = -\frac{b}{a} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{शून्यांकों का गुणनफल} = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$$

**उदाहरण-4** एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यांकों का योग एवं गुणनफल क्रमशः  $-3$  और  $2$  हैं।

द्विघात बहुपद,

$$x^2 - (\text{शून्यांकों का योग})x + \text{शून्यांकों का गुणनफल}$$

$$= x^2 - (-3)x + 2$$

$$= x^2 + 3x + 2$$

**उदाहरण-5** जाँच कीजिए कि त्रिघात बहुपद  $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$  के शून्यांक  $3, -1$  और  $-\frac{1}{3}$  हैं। इसके पर्याप्त शून्यांकों तथा गुणों के बीच संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल -

$$p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$$

$$p(3) = 3(3)^3 - 5(3)^2 - 11(3) - 3$$

$$= 3(27) - 5(9) - 33 - 3$$

$$= 81 - 45 - 33 - 3$$

$$= 81 - 81 = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ एक शून्यांक है।}$$

$$p(-1) = 3(-1)^3 - 5(-1)^2 - 11(-1) - 3$$

$$= -3 - 5 + 11 - 3$$

$$= -11 + 11 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ भी एक शून्यांक है}$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11\left(-\frac{1}{3}\right) - 3$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{5}{3} + \frac{11}{3} - 3$$

$$\frac{-1 - 5 + 11 - 9}{3} = \frac{-3 + 11}{3} = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ भी एक शून्यांक है}$$

$$\alpha = 3, \quad \beta = -1, \quad \gamma = -\frac{1}{3}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 - 1 - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{1}{3} = \frac{6-1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3(-1) + (-1)\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)(3)$$

$$= -3 + \frac{1}{3} - 1$$

$$= -\frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{-4+1}{3} = -\frac{3}{3}$$

$$2\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -\frac{11}{3}$$

$$\alpha\beta\gamma = \cancel{3}(-1)\left(-\frac{1}{\cancel{3}}\right) = 1$$

$$\alpha\beta\gamma = 1$$

सत्यता की जाँच,

$$3x^2 - 5x^2 - 11x - 3$$

$$a = 3, \quad b = -5, \quad c = -11, \quad d = -3$$

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = -\left(\frac{-5}{3}\right) = \frac{5}{3} \Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{5}{3}$$

$$\begin{aligned} \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= \frac{c}{a} \\ &= \frac{c}{a} = -\frac{11}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha\beta\gamma &= -\frac{d}{a} = -\frac{(-3)}{3} \\ -\frac{d}{a} &= \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow -\frac{d}{a} = 1 \end{aligned}$$

### प्रश्नावली-2.2

**प्रश्न-1** निम्न द्विघात बहुपदों के शून्यांक, ज्ञात कीजिए और शून्यांकों तथा गुणकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{1) } x^2 - 2x - 8 \\ &= x^2 - 4x + 2x - 8 \\ &= x(x-4) + 2(x-4) \\ &= (x-4)(x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-4 &= 0, \quad x+2 = 0 \\ x &= 4, \quad x = -2 \end{aligned}$$

$$\text{शून्यांक} = 4 \text{ और } -2$$

$$\text{शून्यांकों का योग} = 4 + (-2) = 2$$

$$\text{शून्यांकों का गुणफल} = 4(-2) = -8$$

$$ax^2 + bx + c \Rightarrow x^2 - 2x - 8$$

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = -8$$

$$\text{शून्यांकों का योग} = -\frac{b}{a} = -\frac{(-2)}{1} = 2$$

$$\text{शून्यांकों का गुणफल} = \frac{c}{a} = \frac{-8}{1} = -8$$



(vi)  $4s^2 - 4s + 1$

$$= 4s^2 - 2s - 2s + 1$$

$$= 2s(2s-1) - 1(2s-1)$$

$$= (2s-1)(2s-1)$$

$$= 2s-1=0 \Rightarrow \boxed{s = \frac{1}{2}}$$

$$= 2s-1=0$$

$$= \boxed{s = \frac{1}{2}}$$

$$\text{रून्यांक} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$\text{रून्यांकों का योग} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{रून्यांकों का गुणफल} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

सत्यता की जाँच :-

$$4s^2 - 4s + 1$$

$$a = 4$$

$$b = -4$$

$$c = 1$$

$$\text{रून्यांकों का योग} = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{4} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{-b}{a} = 1}$$

$$\text{रून्यांकों का गुणफल} = \frac{c}{a} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\frac{c}{a} = \frac{1}{4}}$$

(vii)  $6x^2 - 3 - 7x$

$$= 6x^2 - 7x - 3$$

$$= 6x^2 - 3x + 2x - 3$$

$$= 3x(2x-3) + 1(2x-3)$$

$$= (2x-3)(3x+1)$$

$$2x-3=0$$

$$3x+1=0$$

$$2x=3$$

$$3x=-1$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$$\boxed{\text{रून्यांक} = \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}}$$

$$\text{रून्यांकों का योगफल} = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\text{रून्यांकों का गुणफल} = \left(\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

सत्यता की जाँच :-

$$6x^2 - 7x - 3$$

$$a = 6$$

$$b = -7$$

$$c = -3$$

$$\text{रून्यांकों का योगफल} = \frac{-b}{a} = \frac{-(-7)}{6} = \frac{7}{6} \Rightarrow \boxed{\frac{-b}{a} = \frac{7}{6}}$$

$$\text{रून्यांकों का गुणफल} = \frac{c}{a} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{c}{a} = -\frac{1}{2}}$$

$$(iv) 4u^2 + 8u$$

$$= 4u(u+2)$$

$$= 4u = 0, \quad u+2 = 0$$

$$= \boxed{u=0}, \quad \boxed{u=-2}$$

$$\text{शून्यांक} = 0 \text{ और } -2$$

$$\text{शून्यांकों का योगफल} = 0 + (-2) = -2$$

$$\text{शून्यांकों का गुणफल} = 0(-2) = 0$$

सत्यता की जाँच :-

$$4u^2 + 8u$$

$$a = 4$$

$$b = 8$$

$$c = 0$$

$$\text{शून्यांकों का योगफल} = -\frac{b}{a} = -\frac{8}{4} = -2$$

$$\boxed{-\frac{b}{a} = -2}$$

$$\text{शून्यांकों का गुणफल} = \frac{c}{a} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\boxed{\frac{c}{a} = 0}$$

$$(v) x^2 - 15$$

$$= x^2 - 15$$

$$= x^2 - (\sqrt{15})^2$$

$$= (x + \sqrt{15})(x - \sqrt{15})$$

$$\boxed{x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)}$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{15} = 0, \quad x - \sqrt{15} = 0$$

$$x = -\sqrt{15}, \quad x = \sqrt{15}$$

$$\boxed{\text{शून्यांक} = -\sqrt{15}, \sqrt{15}}$$

$$\text{शून्यांकों का योग} = \sqrt{15} + (-\sqrt{15}) = 0$$

$$\text{शून्यांकों का गुणफल} = (\sqrt{15})(-\sqrt{15}) = -15$$

सत्यता की जाँच :-

$$x^2 - 15$$

$$= x^2 + 0x - 15$$

$$a = 1$$

$$b = 0$$

$$c = -15$$

$$\text{शून्यांकों का योग} = -\frac{b}{a} = -\left(\frac{0}{1}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{-\frac{b}{a} = 0}$$

$$\text{शून्यांकों का गुणफल} = \frac{c}{a} = \frac{-15}{1} = -15 \Rightarrow \boxed{\frac{c}{a} = -15}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(vi)} \quad & 3x^2 - x - 4 \\
 &= 3x^2 - 4x + 3x - 4 \\
 &= x(3x-4) + 1(3x-4) \\
 &\quad (3x-4)(x+1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3x-4 &= 0 & x+1 &= 0 \\
 3x &= 4 & x &= -1 \\
 x &= \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{शून्यांक} = \frac{4}{3} \text{ और } -1$$

$$\text{शून्यांकों का योगफल} = \frac{4}{3} - 1 = \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{शून्यांकों का गुणफल} = \left(\frac{4}{3}\right)(-1) = -\frac{4}{3}$$

सत्यता की जाँच:-

$$3x^2 - x - 4$$

$$a = 3 \quad b = -1 \quad c = -4$$

$$\text{शून्यांकों का योगफल} = -\frac{b}{a} = -\frac{(-1)}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{-\frac{b}{a} = \frac{1}{3}}$$

$$\text{शून्यांकों का गुणफल} = \boxed{\frac{c}{a} = \frac{-4}{3}}$$

**प्रश्न 3** एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यांकों का योग तथा गुणफल क्रमशः दी गई संख्याएँ हैं।

$$(i) \frac{1}{4}, -1$$

द्विघात बहुपद,

$$x^2 - (\text{शून्यांकों का योगफल})x + (\text{शून्यांकों का गुणफल})$$

$$= x^2 - \frac{1}{4}x + (-1)$$

$$= \frac{4x^2 - x - 4}{4}$$

$$= \boxed{4x^2 - x - 4}$$

$$(ii) \sqrt{2}, \frac{1}{3}$$

$$= x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1}{3}$$

$$= \boxed{3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1}$$



(iii)  $0, \sqrt{5}$

$$\Rightarrow x^2 - 0x + \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + \sqrt{5}}$$

(iv)  $1, 1$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 - x + 1}$$

(v)  $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \text{अनुपात} &= x^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)x + \frac{1}{4} \\ &= x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$= \frac{4x^2 + x + 1}{4}$$

$$= \boxed{4x^2 + x + 1}$$

(vi)  $4, 1$

$$\boxed{x^2 - 4x + 1}$$

उदाहरण-6  $2x^2 + 3x + 1$  को  $x+2$  से भाग दीजिए।

$$\begin{array}{r} x+2 \overline{) 2x^2 + 3x + 1} \quad \underline{2x+4} \quad [ \text{भागफल} ] \\ \hline 2x^2 + 4x \\ \hline -x + 1 \\ \hline -x - 2 \\ \hline 3 \quad [ \text{शेषफल} ] \end{array}$$

$$\boxed{P(x) = g(x) \times q(x) + r(x)}$$

$$\boxed{(2x^2 + 3x + 1) = (x+2)(2x-1) + 3}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^2 + 3x + 1 \\ g(x) &= x+2 \\ q(x) &= 2x-1 \\ r(x) &= 3 \end{aligned}$$

विभाजन एल्गोरिथम

उदाहरण-7  $3x^3 + x^2 + 2x + 5$  को  $1 + 2x + x^2$  से भाग दीजिए।

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 1 \overline{) 3x^3 + x^2 + 2x + 5} \quad \underline{3x^3 + 6x^2 + 3x} \\ \hline -5x^2 - x + 5 \\ \hline -5x^2 - 10x - 5 \\ \hline 9x + 10 \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^3 + x^2 + 2x + 5 \\ g(x) &= x^2 + 2x + 1 \\ q(x) &= 3x - 5 \\ r(x) &= 9x + 10 \end{aligned}$$

विभाजन एल्गोरिथम,  $P(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$

$$= \boxed{(3x^3 + x^2 + 2x + 5) = (x^2 + 2x + 1)(3x - 5) + (9x + 10)}$$

**उदाहरण-8**  $3x^2 - x^3 - 3x + 5$  को  $x-1-x^2$  से भाग दीजिए और विभाजन एल्गोरिथम की सत्यता की जाँच कीजिए।

$$\begin{array}{r} -x^2 + x - 1 \overline{) -x^3 + 3x^2 - 3x + 5} \quad x-2 \\ \underline{+x^3 + x^2 - x} \phantom{+5} \\ 2x^2 - 2x + 5 \\ \underline{2x^2 - 2x + 2} \\ 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ q(x) &= -x^2 + x - 1 \\ r(x) &= x - 2 \\ r(x) &= 3 \end{aligned}$$

विभाजन एल्गोरिथम  $\rightarrow p(x) = q(x) \times r(x) + r(x)$

$$\Rightarrow (-x^3 + 3x^2 - 3x + 5) = (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3$$

सत्यता की जाँच :-

$$\begin{aligned} RHS &= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3 \\ &= -x^2 + 2x^2 + x^2 - 2x - x + 2 + 3 \\ &= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 = LHS \end{aligned}$$

**उदाहरण-9**  $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$  के सभी शून्यांक ज्ञात कीजिए, यदि आपको इसके 2 शून्यांक  $\sqrt{2}$  और  $-\sqrt{2}$  ज्ञात हैं।

$$\begin{array}{l|l} \underline{\text{हल}} - & \\ x = \sqrt{2} & x = -\sqrt{2} \\ x - \sqrt{2} = 0 & x + \sqrt{2} = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 - (\sqrt{2})^2 \quad [\because x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)]$$

$$= x^2 - 2$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 0x - 2 \overline{) 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2} \quad 2x^2 - 3x + 1 \\ \underline{2x^4 + 0x^3 - 4x^2} \phantom{+6x - 2} \\ -3x^3 + x^2 + 6x \phantom{- 2} \\ \underline{-3x^3 + 0x^2 + 6x} \phantom{- 2} \\ x^2 + 0x - 2 \\ \underline{x^2 + 0x - 2} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & 2x^2 - 3x + 1 \\ &= 2x^2 - 2x - 1x + 1 \\ &= 2x(x-1) - 1(x-1) \\ &= (x-1)(2x-1) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} x-1=0 & 2x-1=0 \\ x=1 & 2x=1 \\ & \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\boxed{\text{शून्यांक} = 1, \frac{1}{2}}$$

## प्रश्नावली-2.3

**प्रश्न-1** विभाजन एल्गोरिथम का प्रयोग करके, निम्न में  $p(x)$  को  $g(x)$  से भाग देने पर भागफल  $q(x)$  तथा शेषफल  $r(x)$  ज्ञात कीजिए।

(i)  $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ ,  $g(x) = x^2 - 2$

$$\begin{array}{r} x^3 + 0x^2 - 2 \\ \underline{x^3 - 3x^2 + 5x - 3} \quad \text{भागफल} \\ -3x^2 + 7x - 3 \\ \underline{-3x^2 + 0x + 6} \\ 7x - 9 = \text{शेषफल} \end{array}$$

(ii)  $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$ ,  $g(x) = x^2 + 1 - x$

$$\begin{array}{r} x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 4x + 5 \\ \underline{x^4 - x^3 + x^2} \quad \text{भागफल} \\ -x^3 - 4x^2 + 4x \\ \underline{-x^3 - x^2 + x} \\ -3x^2 + 3x + 5 \\ \underline{-3x^2 + 3x - 3} \\ 8 = \text{शेषफल} \end{array}$$

(iii)  $p(x) = x^4 - 5x + 6$ ,  $g(x) = 2 - x^2$

$$\begin{array}{r} -x^2 + 0x + 2 \\ \underline{x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 5x + 6} \quad \text{भागफल} \\ x^4 + 0x^3 - 2x^2 \\ \underline{2x^2 - 5x + 6} \\ 2x^2 + 0x - 4 \\ \underline{-2x^2 + 0x + 4} \\ -5x + 10 = \text{शेषफल} \end{array}$$

**प्रश्न-2** पहले बहुपद से दूसरे बहुपद को भाग करके, जाँच कीजिए कि क्या प्रथम बहुपद द्वितीय बहुपद का एक गुणनखण्ड है।

(i)  $t^2 - 3$ ,  $2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

$$\begin{array}{r} t^2 + 0t - 3 \\ \underline{2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12} \quad \text{भागफल} \\ 2t^4 + 0t^3 - 6t^2 \\ \underline{3t^3 + 4t^2 - 9t} \\ 3t^3 + 0t^2 - 9t \\ \underline{4t^2 + 0t - 12} \\ 4t^2 + 0t - 12 \\ \underline{-4t^2 + 0t + 12} \\ 0 = \text{शेषफल} \end{array}$$

शेषफल = 0

∴ प्रथम बहुपद द्वितीय बहुपद का एक गुणनखण्ड है।

(ii)  $x^2 + 3x + 1$ ,  $3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 3x + 1 \overline{) 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2} \quad 3x^2 - 4x + 2 \\
 \underline{3x^4 + 9x^3 + 3x^2} \phantom{+ 2x + 2} \\
 -4x^3 - 10x^2 + 2x \phantom{+ 2} \\
 \underline{-4x^3 + 12x^2 + 4x} \phantom{+ 2} \\
 2x^2 - 6x + 2 \\
 \underline{2x^2 + 6x + 2} \\
 0 = \text{शेषफल}
 \end{array}$$

शेषफल = 0

∴ प्रथम बहुपद द्वितीय बहुपद का एक गुणखण्ड है।

(iii)  $x^3 + 0x^2 - 3x + 1$ ,  $x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 0x^2 - 3x + 1 \overline{) x^5 + 0x^4 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1} \quad x^2 - 1 \\
 \underline{x^5 + 0x^4 - 3x^3 + x^2} \phantom{+ 3x + 1} \\
 -x^3 + 0x^2 + 3x + 1 \\
 \underline{-x^3 + 0x^2 + 3x - 1} \\
 2 = \text{शेषफल}
 \end{array}$$

शेषफल  $\neq 0$

∴ प्रथम बहुपद द्वितीय बहुपद का एक गुणखण्ड नहीं है।

**उदाहरण-3**  $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$  के अन्व सारी शून्यांक ज्ञात कीजिए, यदि इसके दो शून्यांक  $\sqrt{\frac{5}{3}}$  और  $-\sqrt{\frac{5}{3}}$  हैं।

हल-

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{\frac{5}{3}} & x &= -\sqrt{\frac{5}{3}} \\
 \Rightarrow x - \sqrt{\frac{5}{3}} &= 0 & x + \sqrt{\frac{5}{3}} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(x - \sqrt{\frac{5}{3}}\right) \left(x + \sqrt{\frac{5}{3}}\right) \\
 &= x^2 - \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 \quad [ \because (x+y)(x-y) = x^2 - y^2 ] \\
 &= x^2 - \frac{5}{3} \\
 &= \frac{3x^2 - 5}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 3x^2 + 0x - 5 \overline{) 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5} \quad x^2 + 2x + 1 \\
 \underline{3x^4 + 0x^3 - 5x^2} \phantom{- 10x - 5} \\
 6x^3 + 3x^2 - 10x \phantom{- 5} \\
 \underline{6x^3 + 0x^2 - 10x} \phantom{- 5} \\
 3x^2 + 0x - 5 \\
 \underline{3x^2 + 0x - 5} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= x^2 + 2x + 1 \\
 &= x^2 + 1x + 1x + 1 \\
 &= x(x+1) + 1(x+1) \\
 &= (x+1)(x+1)
 \end{aligned}$$

गुण्योक्त →

$$\begin{array}{c|c}
 x+1=0 & x+1=0 \\
 \hline
 x=-1 & x=-1
 \end{array}$$

**प्रश्न-4** यदि  $x^3 - 3x^2 + x + 2$  को एक बहुपद  $g(x)$  से भाग देने पर भागफल और शेषफल क्रमशः  $(x-2)$  और  $(-2x+4)$  हैं तो  $g(x)$  ज्ञात कीजिए।

विभाजन एल्गोरिथम →

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$$

$$\begin{aligned}
 x^3 - 3x^2 + x + 2 &= (x-2)g(x) + (-2x+4) \\
 x^3 - 3x^2 + x + 2 + 2x - 4 &= (x-2)g(x) \\
 x^3 - 3x^2 + 3x - 2 &= (x-2)g(x)
 \end{aligned}$$

$$g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}{x-2} \rightarrow ①$$

$$\begin{array}{r}
 x-2 \overline{) x^3 - 3x^2 + 3x - 2} \quad (x^2 - x + 1) \\
 \underline{x^3 - 2x^2} \phantom{+ 3x - 2} \\
 -x^2 + 3x \phantom{- 2} \\
 \underline{+ x^2 + 2x} \phantom{- 2} \\
 x - 2 \\
 \underline{x - 2} \\
 0
 \end{array}$$

$$g(x) = x^2 - x + 1$$

**प्रश्न-5** बहुपदों  $p(x)$ ,  $g(x)$ ,  $q(x)$  और  $r(x)$  के ऐसे उदाहरण दीजिए जो विभाजन एल्गोरिथम को सन्तुष्ट करते हों तथा

(i) घात  $p(x)$  = घात  $q(x)$

विभाजन एल्गोरिथम,  $p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$

(घात  $g(x) >$  घात  $r(x)$ )

$$\text{घात } p(x) = \text{घात } g(x) + \text{घात } q(x)$$

$$1 = 0 + 1$$

$$2 = 0 + 2$$

उदाहरण

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 2x+3} \\ \underline{-2x} \phantom{+3} \\ 3 \\ \underline{-2} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} p(x) & = & 2x+3 \\ q(x) & = & x+1 \\ g(x) & = & 2 \\ r(x) & = & 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\text{घात } p(x) = \text{घात } q(x)}$$

(iv) घात  $q(x) = \text{घात } r(x)$

विभाजन एल्गोरिथम,  $p(x) = q(x) \times g(x) + r(x)$

$$\begin{aligned} &= p(x) = (x^2) \times (x+1) + (x+2) \\ &= p(x) = x^3 + x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} p(x) = x^3 + x^2 + x + 2 \\ q(x) = x+1 \\ r(x) = x+2 \\ g(x) = x^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{घात } q(x) = \text{घात } r(x)}$$

(ii) घात  $r(x) = 0$

विभाजन एल्गोरिथम,  $p(x) = q(x) \times g(x) + r(x)$

$$\begin{aligned} p(x) &= (x+1) \times (x+2) + 4 \\ p(x) &= x^2 + 2x + x + 2 + 4 \\ &= x^2 + 3x + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} p(x) = x^2 + 3x + 6 \\ q(x) = x+2 \\ g(x) = x+1 \\ r(x) = 4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{घात } r(x) = 0}$$

---